

고성능 마이크로프로세서
초월함수 연산기의 구조
(Transcendental Function)

2010. 6. 11

연세대학교 전기전자공학과
이용석 교수

Homepage: <http://mpu.yonsei.ac.kr>

E-mail: yonglee@yonsei.ac.kr

전화: 02-392-7194

이용석 교수 약력

1973년 : 연세대학교 전기공학과 학사

1981년 : University of Michigan, Ph.D

1982 ~ 1992년 : 미국 실리콘밸리에서
11년간 마이크로프로세서 설계,

인텔사에서 펜티엄(Pentium) 설계

1993년 ~ : 연세대학교 전자공학과 교수



Transcendental (초월함수) 연산기

- Mainframe computer

- Microprocessor

Intel X86 : \sin , \cos , \tan , \tan^{-1} ,
 \log , 2^X

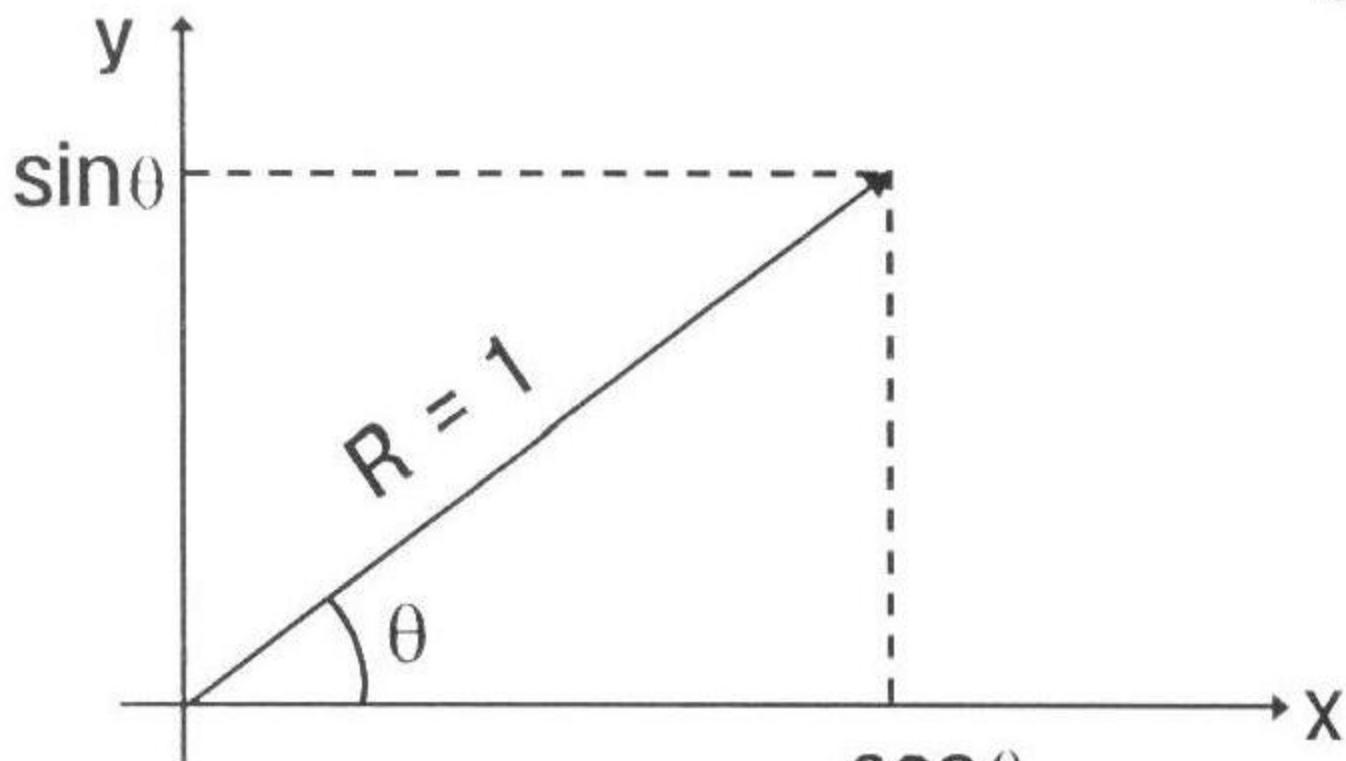
- Calculator

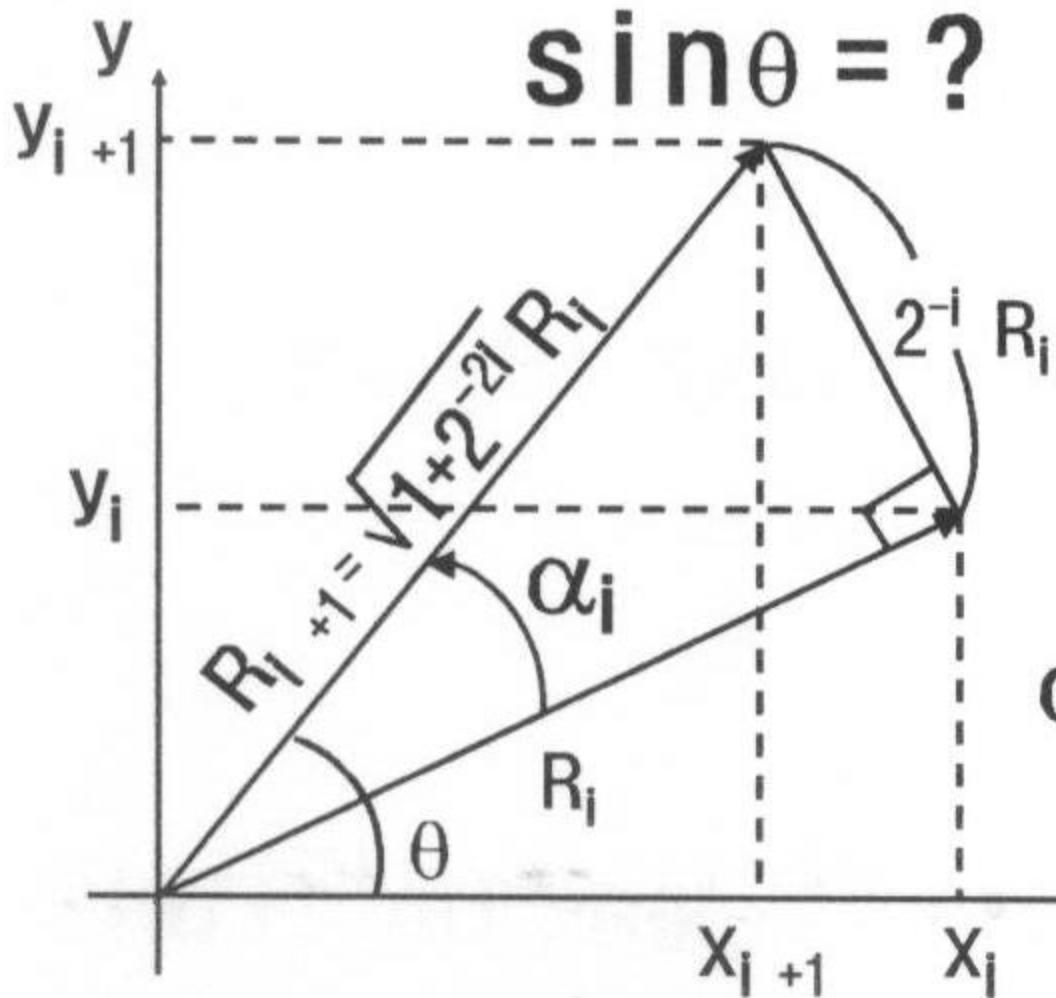
Comparison

	Speed	Hardware	Application
Cordic	slow	low	calculator 387 (770 clk)
Polynomial	medium	medium	486 (250 clk)
Table driven	fast	high	Pentium (100 clk)

Volder's CORDIC (참고문헌 [1])

Problem : $\sin\theta = ?$ $\cos\theta = ?$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$





$$\alpha_i = \tan^{-1} 2^{-i}$$

$$x_{i+1} = x_i - 2^{-i} y_i$$

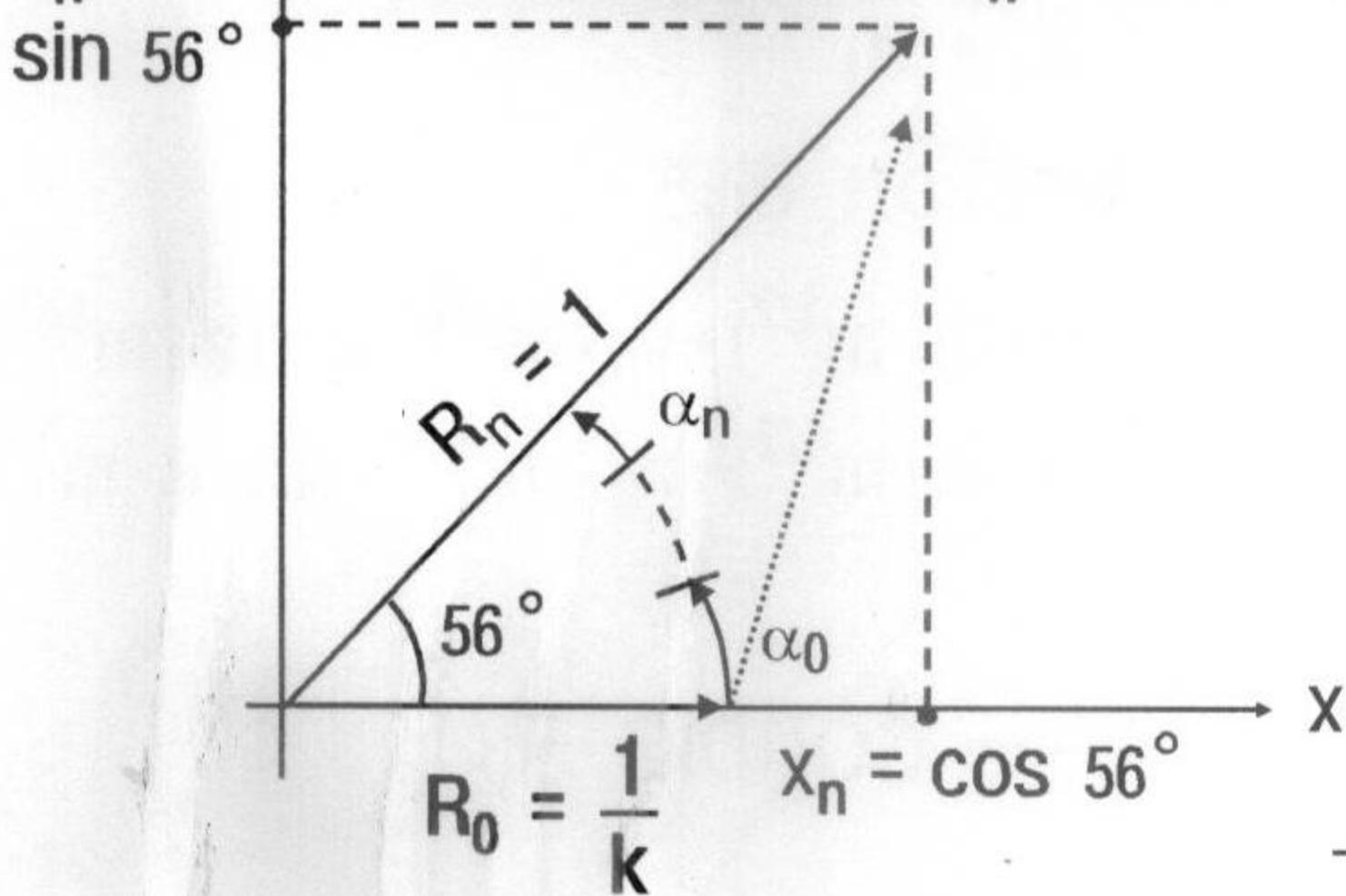
$$y_{i+1} = y_i + 2^{-i} x_i$$

-13-

$\sin 56^\circ = ?$

	$\alpha = \tan^{-1} 2^{-i}$	Total rotation	$K = \sum_{i=0}^n \sqrt{1 + 2^{-2i}}$
i=0	$\alpha_0 = 45$	45	R_0
i=1	$\alpha_1 = 26.57$	$45 + 26.57 = 71.57$	$1.414R_0$
i=2	$\alpha_2 = 14.04$	$71.57 - 14.04 = 57.53$	$1.58R_0$
i=3	$\alpha_3 = 7.13$	$57.53 - 7.13 = 50.4$	$1.63R_0$
i=4	$\alpha_4 = 3.58$	$50.4 + 3.58 = 53.98$	$1.642R_0$
i=5	$\alpha_5 = 1.79$	$53.98 + 1.79 = 55.77$	$1.644R_0$ (k = 1.644)

$R_0 = \frac{1}{k}$ 로 시작하여
n회 rotation하면 $R_n = 1$ 이된다.



$$\sin 56^\circ = ? \quad \cos 56^\circ = ?$$

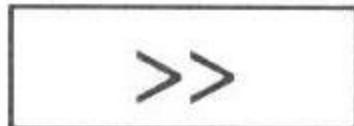
$\alpha_i = \tan^{-1} 2^{-i}$	Angle	x_{i+1}	y_{i+1}
	0	$x_0 = \frac{1}{k} = 0.6083$	$y_0 = 0$
$\alpha_0 = 45$	45	$x_1 = 0.6083$	$y_1 = 0.6083$
$\alpha_1 = 26.57$	71.57	$x_2 = 0.3041$	$y_2 = 0.9124$
$\alpha_2 = 14.04$	57.53	$x_3 = 0.5322$	$y_3 = 0.8363$
$\alpha_3 = 7.13$	50.4	$x_4 = 0.6368$	$y_4 = 0.7698$
$\alpha_4 = 3.58$	53.98	$x_5 = 0.5887$	$y_5 = 0.8096$
$\alpha_5 = 1.79$	55.77	$x_6 = 0.5634$	$y_6 = 0.8280$
		$(\cos 56^\circ = 0.5592)$	$(\sin 56^\circ = 0.8290)$

Range Reduction

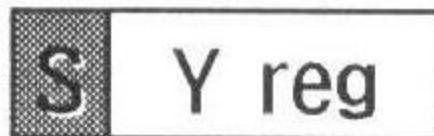
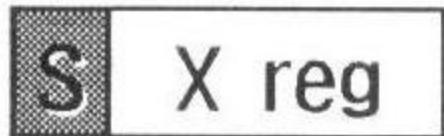
$$\sin(Q \cdot 90^\circ + \theta) = \begin{cases} \sin\theta & \text{if } Q \bmod 4 = 0 \\ \cos\theta & \text{if } Q \bmod 4 = 1 \\ -\sin\theta & \text{if } Q \bmod 4 = 2 \\ -\cos\theta & \text{if } Q \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

Hardware Implementation

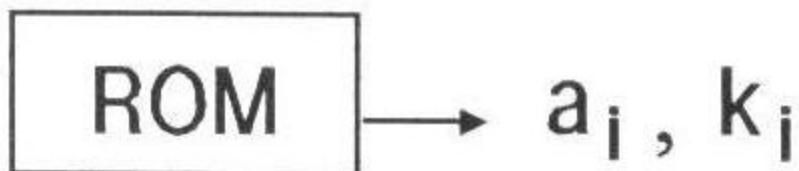
(1) 2^{-i} 의 구현 → right shifter



(2) y_n, z_n 의 수렴 방향 결정
→ Y, Z register의 sign bit 이용



(3) a_i, k_i 상수값 → ROM table



(4) Normalize → 계산값이 너무 작은 경우 인수를 leading zero가 없도록 정규화 (shifter 이용)

*Cordic*의 특성

- 간단한 단일의 hardware로 다양한 초월 함수를 구할 수 있음
- 높은 accuracy를 얻기 위하여 register 길이가 늘어나고 register 길이 만큼 iteration을 해야하므로 속도가 느림



Polynomial Based Algorithm

(참고문헌 [3][4])

- 원리 : 모든 초월함수는 대수함수의 유한 급수로 전개 가능함

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^K a_j \times x^{m+jn}$$

Polynomial 방식의 특징

- 초월함수를 곱셈과 덧셈의 iteration으로 구함
- 함수에 따른 계수의 수열을 미리 ROM table에 저장함
- 다항식의 iteration을 많이 할수록 정확도는 올라가나 시간이 오래 걸림



Example

sin x =

$$x \left(1 - \left(\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{120} - \left(\frac{1}{5040} - \frac{1}{362880} x^2 \right) x^2 \right) x^2 \right) x^2 \right) + \dots$$

- 무한대의 iteration이 가능하나 $\frac{1}{362880}$ 정도의 정확도를 갖는다고 가정

- x , x^2 를 미리 구함
- $1/6, 1/120, 1/5040, 1/362880$ 는
ROM table 내에 존재
- 5번의 곱셈, 4회의 덧셈 필요

sin (1.12) 의 경우

$$x = 1.12 \quad x^2 = 1.2544$$

Multiplier 이용하여 미리 구한다

$$(1) \quad S_1 = \frac{1}{5040} - \frac{1}{362880} \times 1.2544$$

Adder, multiplier, ROM table 이용

$$(2) \quad S_2 = \frac{1}{120} - S_1 \times 1.2544$$

Adder, multiplier, ROM table 이용

$$(3) \quad S_3 = \frac{1}{6} - S_2 \times 1.2544$$

Adder, multiplier, ROM table 이용

$$S_4 = 1 - S_3 \times 1.2544$$

(4) Adder, multiplier, ROM table 이용

$$(5) \quad S_5 = 1.12 \times S_4$$

Multiplier 이용

$$S_5 = 0.9001005286$$

(오차 = 0.000000086)

해설

- 초기 x^2 을 구하기 위한 multiplier 사용을 제외하면 5회의 multiplier, 4회의 adder를 사용함
- x 의 절대값이 클수록 허용 오차를 줄이기 위하여 많은 횟수의 iteration 필요
→ table driven algorithm 필요성